ដំណោះស្រាយលំហាត់ QCM ប្រឡងចូលតិចណូ២០១៦

ដោយ *សុខុន វេនី*

១. បើ $f'(x)$ ជាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{-1}{x^2+4}$ នោះ

ក. $f'(x)=-\frac{1}{(x^2+4)^2}$ ខ. $f'(x)=\frac{2x}{(x^2+4)^2}$

គ. $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+4)^2}$ ឃ. $f'(x)=\frac{1}{(x^2+4)^2}$

ង. $f'(x)=\frac{2x}{x^2+4}$

ដំណោះស្រាយ

$$f'(x)=-\frac{-(x^2+4)'}{(x^2+4)^2}=\frac{2x}{(x^2+4)^2}$$

ចម្លើយ ខ ។

២. គេឲ្យវ៉ិចទ័របី $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(1,-2,1)$, $\vec{c}=(-1,-2,1)$ ។ ចូររកមាឌ V នៃប្រឡេពីប៉ែត ដែលកំណត់ដោយវ៉ិចទ័រទាំងបីនេះ។

ក. $V=6$ ខ. $V=7$

គ. $V=8$ ឃ. $V=9$ ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

មាឌនៃប្រឡេពីប៉ែត គឺជាម៉ូឌុលនៃផលគុណនៃបីវ៉ិចទ័រ

$$V=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\-1&-2&1\end{vmatrix}$$

$$=1\cdot\begin{vmatrix}-2&1\\-2&1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1&-2\\-1&-2\end{vmatrix}$$

$$=(-2+2)-(1+1)+(-2-2)=-6$$

$V=|-6|=6$ ឯកតាមាឌ

ចម្លើយ ក ។

៣. គេយកកន្សោម៖

$$E=\frac{\sin^8 x-\cos^8 x}{(\sin^2 x-\cos^2 x)(1-2\sin^2 x\cos^2 x)}$$

នោះ E ស្មើនឹង៖

ក. 2 ខ. -2

គ. -1 ឃ. 1 ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន E ស្មើនឹង៖

$$\frac{(\sin^4 x-\cos^4 x)(\sin^4 x+\cos^4 x)}{(\sin^2 x-\cos^2 x)((\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x)}$$

$$=\frac{(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x+\cos^4 x)}{(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^4 x+\cos^4 x)}$$

$=1$

ចម្លើយ ឃ ។

ក្បួនកាត់៖ យក $x=0$ យើងបាន៖

$$E=\frac{0-1}{(0-1)(1-2\cdot 0\cdot 1)}=1$$

៤. គេយក a,b ជាប្រវែងជ្រុងជាប់នឹងមុំកែង និង c ជាប្រវែងអ៊ីប៉ូតេនុស នៃត្រីកោណកែងមួយ។ បើ a កើនឡើងដោយអត្រា $5\ cm/s$ នៅពេល $a=4\ cm$ និង b កើនឡើងដោយអត្រា $10\ cm/s$ នៅពេល $b=3\ cm$ ចូររកអត្រាកំណើននៃ c ។

ក. $10\ cm/s$ ខ. $11\ cm/s$

គ. $8\ cm/s$ ឃ. $9\ cm/s$ ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $c^2 = a^2 + b^2$

$$d(c^2) = d(a^2 + b^2)$$

$$2c\,dc = 2a\,da + 2b\,db$$

$$dc = \frac{1}{c}(a \cdot da + b \cdot db)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}(4 \cdot 5 + 3 \cdot 10) = 10\ cm/s$$

ចម្លើយ ក ។

៥. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ គឺ

ក. $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ ខ. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

គ. $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ឃ. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

$$f'(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

ចម្លើយ គ ។

៦. គេយក $E = \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ ដែល $i^2 = -1$ យក $Q = E^2 + E^4 + \cdots + E^{16}$ និង $R = E + E^3 + \cdots + E^{15}$ ។ ចូរគណនា $S = Q + R$ ។

ក. $S = \frac{1}{E-1}$ ខ. $S = -1$

គ. $S = 0$ ឃ. $S = 1$ ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

$$S = Q + R = (1 + E + E^2 + \cdots + E^{15} + E^{16}) - 1$$

$$= \frac{E^{17}-1}{E-1} - 1$$

ដោយ $E^{17} = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{17}\right)\right)^{17}$

$$= \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$$

$$S = \frac{1-1}{E-1} - 1 = -1$$

ចម្លើយ ខ ។

៧. ចូរគណនា

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{8\cos^2 5x + 2\cos x - 3}{4\cos^2 5x + 8\cos x - 5}$$

ក. $-\frac{19}{6}$ ខ. $-\frac{19}{7}$

គ. $\frac{19}{7}$ ឃ. $\frac{19}{6}$ ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទ L'Hôpital

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ ,\ f(x_0) = g(x_0) = 0$$

យើងបាន

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{(8\cos^2 5x + 2\cos x - 3)'}{(4\cos^2 5x + 8\cos x - 5)'}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{-2(40\sin 5x\cos 5x + \sin x)}{-8(5\sin 5x\cos 5x + \sin x)}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{40\sin\frac{5\pi}{3}\cos\frac{5\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}}{5\sin\frac{5\pi}{3}\cos\frac{5\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{40\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}}{5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{19}{6}$$

ចម្លើយ ឃ ។

៨. ចំនួននៃឯកធាទាំងអស់ នៅក្នុងពហុធា

$(a+b+c)^{20}$ មាន៖

ក. 232 ខ. 3

គ. 230 ឃ. 231 ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

សម្រាប់ពហុធា k តួ ដឺក្រេទី n យើងអាចពន្លាត៖

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_k=n \\ 0\le n_i\le n\,,\ i=\overline{1,n}}} \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}\cdot a_1^{n_1}\cdot a_1^{n_k}\cdot\ldots\cdot a_k^{n_k}$$

យើងបាន

$$(a+b+c)^{20} = \sum_{n_1+n_2+n_3=20} \frac{20!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}a^{n_1}b^{n_2}c^{n_3}$$

បើយើងពន្លាត ស៊ិចម៉ា យើងបាន ចំនួនតួ ស្មើនឹង ចំនួនឫសគត់មិនអវិជ្ជមាន នៃសមីការ៖

$$n_1+n_2+n_3=20\ ,\ \ n_1,n_2,n_3\ge 0$$

តាង $t_i=n_i+1\,,\ i=\overline{1,n}$ យើងបាន៖

$$t_1+t_2+t_3=23\ ,\ \ t_1,t_2,t_3\ge 1$$

យើងសរសេរលេខ 1 ចំនួន 23 ដងៗ យើងប្រើ លេខ 0 ចំនួន 2 ដើម្បីញែក 23 ជា តម្លៃនៃ ៣ចំនួនផ្សេងគ្នា ឧទាហរណ៍ដូចជា៖

1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 … 1 1 1 1 1

ចំនួននៃត្រីធាតុ (t_1,t_2,t_3) ជាឫសនៃសមីការខាងលើ ស្មើនឹងចំនួនករណីនៃការដាក់ លេខសូន្យចំនួន 2 ក្នុងចន្លោះចំនួន 22 គឺ៖ $C(22,2)=231$

ចម្លើយ ឃ ។

៩. សំណុំ S នៃឫសទាំងអស់ របស់វិសមីការ

$$\log_4 x \le \frac{\log_{\sqrt[3]{2}} x - 4}{\log_2 x}$$

ក. $S=(-\infty,1)\cup[4,16]$ ខ. $S=(0,1)\cup(4,16)$

គ. $S=(0,1)\cup[4,16]$ ឃ. $S=(4,16)$

ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

វិសមីការមានន័យលុះត្រាតែ៖

$$\begin{cases}\log_2 x\ne 0\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow x\in(0,1)\cup(1,+\infty)\ \ (\mathbf{1})$$

វិសមីការក្លាយទៅជា៖

$$\frac{1}{2}\log_2 x \le \frac{3\log_2 x-4}{\log_2 x}$$

$$\frac{(\log_2 x)^2-6\log_2 x+8}{2\log_2 x}\le 0$$

$$\frac{(\log_2 x-2)(\log_2 x-4)}{\log_2 x}\le 0$$

ករណី $\log_2 x>0$ ឬ $x\in(1,+\infty)$ $(\mathbf{2})$ យើងបាន៖

$$(\log_2 x-2)(\log_2 x-4)\le 0$$

$$\log_2 x\in[2,4]$$

$$x\in[4,16]\ \ (\mathbf{3})$$

ករណី $\log_2 x<0$ ឬ $x\in(0,1)$ $(\mathbf{4})$ យើងបាន៖

$$(\log_2 x-2)(\log_2 x-4)\ge 0$$

$$\log_2 x\in(-\infty,2]\cup[4,\infty)$$

$$x\in(0,4]\cup[16,+\infty)\ \ (\mathbf{5})$$

សំណុំឫសនៃវិសមីការគឺ

$$S=(\mathbf{1})\cap\Big(\big((\mathbf{2})\cap(\mathbf{3})\big)\cup\big((\mathbf{4})\cap(\mathbf{5})\big)\Big)$$

$$=\big((0,1)\cup(1,+\infty)\big)\cap\big([4,16]\cup(0,1)\big)$$

$$=(0,1)\cup[4,16]$$

ចម្លើយ គ ។

១០. ចូរគណនា

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{\sqrt[2016]{1+1008x^3}-1}$$

ក. 2　　ខ. -3

គ. 3　　ឃ. -2　　ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

យើងបានតម្លៃលីមីតស្មើនឹង៖

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x\left(\sqrt[2016]{1+1008x^3}^{2015}+\sqrt[2016]{1+1008x^3}^{2014}\dots+1\right)}{\left(\sqrt[2016]{1+1008x^3}-1\right)\left(\sqrt[2016]{1+1008x^3}^{2015}+\dots+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x\left(\sqrt[2016]{1+1008x^3}^{2015}+\sqrt[2016]{1+1008x^3}^{2014}\dots+1\right)}{\sqrt[2016]{1+1008x^3}^{2016}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1008}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\left(\sqrt[2016]{1+1008x^3}^{2015}+\dots+1\right)$$

$$=\frac{1}{1008}\cdot 1^3\cdot\left(\underbrace{1+1+\dots+1}_{2016}\right)=2$$

ចម្លើយ ក ។

១១. យក $f(x)=\frac{x^2(2\ln x-1)}{4}$ ជាអនុគមន៍ និង $f'(x)$ ជាដេរីវេនៃ $f(x)$ ។ គេបាន៖

ក. $f'(x)=3x\ln x$　　ខ. $f'(x)=x^2\ln x$

គ. $f'(x)=x\ln x$　　ឃ. $f'(x)=\frac{\ln x}{x}$

ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

$$f'(x)=\frac{1}{4}\left((2x)(2lnx-1)+x^2\left(\frac{2}{x}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{4}(4x\ln x-2x+2x)=x\ln x$$

ចម្លើយ គ ។

១២. a_n ជាស្វ៊ីត នៃចំនួនពិត ដែល កំណត់ដោយ $a_0=1$ និង $\ln\left(\frac{a_{n+1}}{2}\right)-\ln(a_n)=0$ ។ នោះ កន្សោម $D_n=a_0+a_1+a_2+\dots+a_n$ ស្មើនឹង៖

ក. $D_n=2^n-1$　　ខ. $D_n=2^{n+1}-1$

គ. $D_n=2^n+1$　　ឃ. $D_n=2^{n+1}+1$

ង. $D_n=2^{n+1}$

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន $a_0=1$, $a_{n+1}=2a_n$, $a_n>0$

$(a_n)_{n\geq 0}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានតួទីមួយ $a_0=1$ និង ផលធៀបរួម 2 នោះ៖

$$D_n=1+2+\dots+2^n=2^{n+1}-1$$

ចម្លើយ ខ ។

ក្បួនកាត់៖ យើងមាន $D_0=a_0=1$ នោះមានតែ $D_0=2^{0+1}-1=1$ ប៉ុណ្ណោះដែលផ្ទៀងផ្ទាត់។

១៣. ចូររកដេរីវេទី 2016 នៃអនុគមន៍

$$f(x)=\frac{2}{(x+1)^3}$$

ក. $f^{(2016)}(x)=\frac{2016!}{(x+1)^{2019}}$　　ខ. $f^{(2016)}(x)=\frac{-(2018!)}{(x+1)^{2019}}$

គ. $f^{(2016)}(x)=\frac{2018!}{(x+1)^{2019}}$　　ឃ. $f^{(2016)}(x)=\frac{-(2016!)}{(x+1)^{2019}}$

ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(x)=2(x+1)^{-3}$

យើងបានដេរីវេ៖

$$f'(x)=(-1)(2\cdot 3)(x+1)^{-4}$$
$$f''(x)=(-1)^2(2\cdot 3\cdot 4)(x+1)^{-5}$$
$$f'''(x)=(-1)^3(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)(x+1)^{-6}$$

...

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n(n+2)!\,(x+1)^{-(n+3)}$$

$$f^{(2016)}(x) = (-1)^{2016}(2018)!\,(x+1)^{-(2019)}$$

$$= \frac{2018!}{(x+1)^{2019}}$$

ចម្លើយ គ ។

១៤. ក្រឡាផ្ទៃនៃដែនប្លង់ដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងតាង $y=-x^2$ និង $y=-x-2$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{11}{2}$ ខ. $\frac{9}{2}$

គ. $\frac{10}{3}$ ឃ. $\frac{13}{2}$ ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

ក្រាបទាំងពីរ កាត់គ្នា ត្រង់អាប់ស៊ីស៖

$$-x^2 = -x-2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1\,, x = 2$$

ហើយ $(-x^2) - (-x-2) = -(x^2 - x - 2) \geq 0$ នៅពេល $x \in [-1,2]$

យើងបានក្រឡាផ្ទៃគឺ

$$\int_{-1}^{2} |(-x)^2 - (-x-2)|\, dx$$

$$= -\int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)\, dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

ចម្លើយ ខ ។

១៥. បើ $S_n = 12 + 102 + 1002 + \cdots + 1\overbrace{00\ldots00}^{n}2$ នោះ៖

ក. $S_n = \frac{1}{9}(10^{n+2} + 18n + 10)$

ខ. $S_n = \frac{1}{9}(10^{n+2} + 18n + 9)$

គ. $S_n = \frac{1}{9}(10^{n+2} + 18n + 8)$

ឃ. $S_n = \frac{1}{9}(10^{n+2} + 18n + 7)$

ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

$$S_n = \left(10 + 100 + \cdots + 1\overbrace{00\ldots0}^{n+1}\right) + \left(\overbrace{2 + \cdots + 2}^{n+1}\right)$$

$$= 10 \cdot \frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} + 2(n+1) = \frac{10^{n+2} + 18n + 8}{9}$$

ចម្លើយ គ ។

គន្លឹះកាត់៖ យក $n = 0$ យើងបាន $S_0 = 12$

ចម្លើយ គ គឺ $\frac{1}{9}(100 + 0 + 8) = 12$ ផ្ទៀងផ្ទាត់។

១៦. យក $f(x) = \int_{-x^2}^{x^2} e^{t^2} dt$ ។ ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃ $f(x)$ ។

ក. $f'(x) = 4xe^{x^2}$ ខ. $f'(x) = 2xe^{x^4}$

គ. $f'(x) = 4xe^{x^4}$ ឃ. $f'(x) = 2xe^{x^2}$

ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

តាង $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ e^{x^2} ដែល $F'(x) = e^{x^2}$

យើងបាន

$$f(x) = \int_{-x^2}^{x^2} e^{t^2} dt = F(x)\Big|_{-x^2}^{x^2}$$

$$= F(x^2) - F(-x^2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x \cdot F'(x^2) + 2x \cdot F'(-x^2)$$
$$= 2x \cdot e^{(x^2)^2} + 2x \cdot e^{(-x^2)^2} = 4xe^{x^4}$$

<u>ចម្លើយ</u> គ ។

១៧. ចូរគណនាអាំងតេក្រាល

$$I = \int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

ក. 3π ខ. 2π

គ. 4π ឃ. $\frac{\pi}{2}$ ង. π

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

តាង $x = 2\sin\theta \Rightarrow dx = 2\cos\theta\ d\theta$

$$0 \le x \le 2 \Rightarrow 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

យើងបាន

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2\theta\sqrt{4-4\sin^2\theta} \cdot 2\cos\theta\ d\theta$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin\theta\cos\theta)^2\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\ d\theta$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta = 2\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

<u>ចម្លើយ</u> ង ។

១៨. គេឲ្យ x_1, x_2 ជាឫសពីរនៃសមីការ

$$x^2 + (\cos t - 3\sin t)x - 8\cos^2 t = 0$$

ចូររកតម្លៃធំជាងគេនៃ $F = x_1^2 + x_2^2$ ។

ក. 18 ខ. 8

គ. 20 ឃ. 25 ង. 17

<u>ដំណោះស្រាយទី១</u>

តាមទ្រឹស្តីបទវៀែត (Vieta's theorem) យើងមាន

$$x_1 + x_2 = -(\cos t - 3\sin t)\,,\quad x_1x_2 = -8\cos^2 t$$

នោះ យើងបាន

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2$$
$$= (\cos t - 3\sin t)^2 + 16\cos^2 t$$
$$= 17\cos^2 t - 6\cos t\sin t + 9\sin^2 t$$
$$= (9\cos^2 t - 6\cos t\sin t + \sin^2 t) + 8(\cos^2 t + \sin^2 t)$$
$$= (3\cos t - \sin t)^2 + 8$$

តាងវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (3,-1)$ និង $\vec{v} = (\cos t, \sin t)$

យើងមាន $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta \le |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

ដោយ $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\cos t - \sin t$

$$|\vec{u}|\cdot|\vec{v}| = \sqrt{3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{10}$$

នោះ $x_1^2 + x_2^2 \le \sqrt{10}^2 + 8 = 18$

សមភាពកើតឡើងពេល

$$\frac{3}{\cos t} = \frac{-1}{\sin t} \Leftrightarrow t = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$$

ដូច្នេះ $\max(x_1^2 + x_2^2) = 18$

<u>ដំណោះស្រាយទី២</u>

តាម វិសមភាព កូស៊ីស្វាស (Cauchy-Schwarz)

$$\forall \boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n},\ \boldsymbol{b_1, b_2, \dots, b_n} \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow (\boldsymbol{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n})^2$$
$$\le (\boldsymbol{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2})(\boldsymbol{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2})$$

សមភាពកើតឡើងពេល $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$

ចំពោះ កូស៊ីស្វាស ២តួ

យើងបាន $(3\cos t - \sin t)^2$

$$\le (3^2 + (-1)^2)\cdot(\cos^2 t + \sin^2 t) = 10$$

នោះ $x_1^2 + x_2^2 \le 10 + 8 = 18$

<u>ចម្លើយ</u> ក ។

១៩. កន្សោម $\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\cdots}}}}}}$

ស្មើនឹង៖

ក. 2 ខ. -2

គ. -3 ឃ. 5 ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

$$S=\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\cdots}}}}}}$$

$$S^2=1+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\cdots}}}}}$$

$$(S^2-1)^2=7+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\cdots}}}}$$

$$(S^2-1)^2=7+S$$

$$S^4-2S^2-S-6=0\,,\qquad S>0$$

$$(S-2)(S^3+2S^2+2S+3)=0$$

$$\Rightarrow S=2$$

ចម្លើយ ក ។

២០. បើ $x_0=0\,,\ x_{n+1}=2+\frac{1}{2+x_n}\,,\ n=0,1,2,\ldots$ នោះ លីមីតនៃស្វ៊ីត x_n ស្មើនឹង៖

ក. $\sqrt{6}$ ខ. $-\sqrt{5}$

គ. $\sqrt{7}$ ឃ. $\sqrt{5}$ ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

យើងអាចស្រាយបាន យ៉ាងងាយថា គ្រប់តួរបស់ស្វ៊ីត x_n គឺ សុទ្ធតែវិជ្ជមាន

តាង $L>0$ ជាលីមីតរបស់ស្វ៊ីត x_n

យើងបាន

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}x_{n+1}=L$$

នាំឲ្យ

$$\lim_{n\to+\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}2+\frac{1}{2+x_n}$$

$$L=2+\frac{1}{2+L}$$

$$L^2=5\Rightarrow L=\sqrt{5}$$

ចម្លើយ ឃ ។

២១. យក $S_n=1+2\times2+3\times2^2+\cdots+n\times2^{n-1}$

គេបាន៖

ក. $S_n=(n-1)\,2^n+1$

ខ. $S_n=(n+1)\,2^{n+1}+1$

គ. $S_n=(n+1)\,2^n+1$

ឃ. $S_n=(n-1)\,2^{n+1}+1$

ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយទី១

យើងបាន

$$S_n=1+2\times2+3\times2^2+\cdots+n\times2^{n-1}$$

$$2S_n=2+2\times2^2+\cdots+(n-1)\times2^{n-1}+n\times2^n$$

ដកអង្គនិងអង្គ យើងបាន

$$-S_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\times2^n$$

$$-S_n=(2^n-1)-n\times2^n\Rightarrow S_n=(n-1)\,2^n+1$$

ដំណោះស្រាយទី២

តាង $f(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$

$\Rightarrow f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$

ដោយ

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) - 1$$
$$= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} - 1$$
$$f'(x) = \frac{(n+1)x^n - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2}$$

យក $x = 2$ យើងបាន៖

$$S_n = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1}$$
$$= \frac{(n+1)2^n - (2^{n+1} - 1)}{(2-1)^2} = (n-1)2^n + 1$$

ចម្លើយ ក ។

ក្បួនកាត់៖ យក $n = 2$ នោះ $S_n = 1 + 2 \times 2 = 5$

$S_n = (n-1)\, 2^n + 1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $1 \cdot 2^2 + 1 = 5$ ។

២២. យក $x, y, z \in \mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ ។ ចូររកចំនួននៃឫសទាំងអស់របស់សមីការ $x + y + z = 30$ ។

ក. 457 ខ. 845

គ. 773 ឃ. 496 ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

តាង $a = x + 1$, $b = y + 1$, $c = z + 1$

$$x, y, z \geq 0 \Rightarrow a, b, c \geq 1$$

សមីការក្លាយទៅជា

$$a + b + c = 33\,,\ \ a, b, c \geq 1$$

យើងសរសេរលេខ 1 ចំនួន 33 ដង។ យើងប្រើ លេខ 0 ចំនួន 2 ដើម្បីញែក 33 ជា តម្លៃនៃ ៣ចំនួនផ្សេងគ្នា ឧទាហរណ៍ដូចជា៖

1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 … 1 1 1 1 1

ចំនួននៃត្រីធាតុ (a, b, c) ជាឫសនៃសមីការខាងលើ ស្មើនឹងចំនួនករណីនៃការដាក់ លេខសូន្យចំនួន 2 ក្នុងចន្លោះចំនួន 32 គឺ៖ $C(32,2) = 496$ ។

ចម្លើយ ឃ ។

សម្គាល់៖ យើងអាចចងក្រងជារូបមន្តថា៖

ចំនួនឫសគត់វិជ្ជមាន $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ នៃសមីការ $a_1 + a_2 + \cdots a_n = M$ ស្មើនឹង $C(M-1, n-1)$

ចំនួនឫសគត់មិនអវិជ្ជមាន $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ នៃសមីការ $a_1 + a_2 + \cdots a_n = M$ ស្មើនឹង $C(M+n-1, n-1)$

២៣. គេដឹងថា កន្សោម

$(3 - 2x + x^2)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n} x^{2n}$

បើគេយក $S_n = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}$ នោះ៖

ក. $S_n = \frac{6^n}{2}$ ខ. $S_n = \frac{2^n - 6^n}{2}$

គ. $S_n = \frac{2^n + 6^n}{2}$ ឃ. $S_n = \frac{2^n}{2}$

ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

យក $x = 1$ និង $x = -1$ យើងបាន

$$(3 - 2 + 1)^n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n}$$
$$(3 + 2 + 1)^n = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{2n-1} + a_{2n}$$

ដកអង្គនិងអង្គ យើងបាន

$$2^n - 6^n = 2(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1})$$
$$\Rightarrow S_n = \frac{2^n - 6^n}{2}$$

ចម្លើយ ខ ។

២៤. ចូរគណនា

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x\cdot 8^x}{1+x\cdot 2^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

ក. 2 ខ. 3

គ. 4 ឃ. 5 ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន

$$\lim_{x\to a} u = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}(1+a)^{\frac{1}{a}} = e$$

លីមីតក្លាយទៅជា៖

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x\cdot 8^x)^{\frac{1}{x^2}}}{(1+x\cdot 2^x)^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{\left((1+x\cdot 8^x)^{\frac{1}{x\cdot 8^x}}\right)^{\frac{x\cdot 8^x}{x^2}}}{\left((1+x\cdot 2^x)^{\frac{1}{x\cdot 2^x}}\right)^{\frac{x\cdot 2^x}{x^2}}}$$

$$= \frac{e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{8^x}{x}}}{e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{8^x-1}{x}\right)-\left(\frac{2^x-1}{x}\right)}$$

$$= e^{\ln 8-\ln 2} = e^{\ln 4} = 4$$

ចម្លើយ គ ។

២៥. ចូររកតម្លៃអតិបរមានៃអនុគមន៍

$$f(x) = \frac{2\cos^2 3x + 2\sin 3x\cos 3x}{2\sin^2 3x + 1}$$

ក. $\frac{7+2\sqrt{5}}{3}$ ខ. $\frac{3+2\sqrt{5}}{2}$

គ. $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$ ឃ. $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

$$f(x) = \frac{\frac{2\cos^2 3x + 2\sin 3x\cos 3x}{\cos^2 3x}}{\frac{2\sin^2 3x + 1}{\cos^2 3x}}$$

$$= \frac{2+2\tan 3x}{2\tan^2 3x + 1 + \tan^2 3x}$$

$$= 2\cdot\frac{1+\tan 3x}{1+3\tan^2 3x}$$

តម្លៃអតិបរមានៃ $f(x)$ ស្មើនឹង តម្លៃអតិបរមានៃ

$$g(u) = 2\cdot\frac{1+u}{1+3u^2}$$

យើងមានដេរីវេ

$$g'(u) = 2\cdot\frac{1+3u^2-(1+u)(6u)}{(1+3u^2)^2}$$

$$= 2\cdot\frac{1-6u-3u^2}{(1+3u^2)^2}$$

អនុគមន៍ g មានតម្លៃបរមា នៅត្រង់

$$1-6u-3u^2 = 0$$

$$u = \frac{-3\pm 2\sqrt{3}}{3}$$

យើងបាន

$$g\left(\frac{-3\pm 2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3\pm 2\sqrt{3}}{3}$$

ដូច្នេះ តម្លៃអតិបរមានៃ f គឺ $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

ចម្លើយ ឃ ។

២៦. ក្នុងចំណោមអំណះអំណាងដែលគេឲ្យ តើអំណះអំណាងមួយណាពិត ?

ក. $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{7}}$

ខ. $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{9}}$

គ. $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$

ឃ. $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$

ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

តាង $\theta = \frac{\pi}{5}$, $\sin\theta > 0$

យើងមាន $5\theta = \pi \Rightarrow 3\theta = \pi - 2\theta$

$$\sin 3\theta = \sin(\pi - 2\theta)$$

$$3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$3 - 4(1-\cos^2\theta) = 2\cos\theta$$

$$4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0\,,\quad \cos\theta > 0$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

ចម្លើយ គ ។

២៧. ចំពោះ $n = 1,2,3,\ldots$ យក

$$u_n = \sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\cdots+\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}}$$

នោះ លីមីតនៃស្វ៊ីត $6(u_n - \sqrt{n})$ ស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. 3

គ. 2 ឃ. 4 ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន

$$u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n+\sqrt{n-1+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}} - \sqrt{n}$$

$$= \frac{\sqrt{n-1+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}{\sqrt{n+\sqrt{n-1+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sqrt{\ldots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}\sqrt{n-1+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}+1\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 6\left(u_n - \sqrt{n}\right) = 6\left(\frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}+1}\right) = 3$$

ចម្លើយ ខ ។

២៨. គេយក f ជាអនុគមន៍ពិតនៃមួយអថេរពិត កំណត់ដោយ

$$f(x) = \int_0^x \left(\frac{t}{t^4+1}\right)^2 dt$$

ចូររក $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(32\sqrt{2}f(x)\right)$

ក. 2π ខ. 3π

គ. 4π ឃ. 5π ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន

$$\frac{t^2}{(t^4+1)^2} = \frac{t^2}{((t^2+1)^2-2t^2)^2}$$

$$= \frac{t^2}{\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)^2\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)^2}$$

$$= -\frac{t+\sqrt{2}}{8\sqrt{2}\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)} + \frac{1}{8\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)^2}$$

$$+\frac{t-\sqrt{2}}{8\sqrt{2}\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)} + \frac{1}{8\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)^2}$$

យើងនឹងធ្វើអាំងតេក្រាលលើម្តងមួយប្រភាគ

$$-\frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^x \frac{t+\sqrt{2}}{\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)}dt$$

$$= -\frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^x \left(\frac{2t+\sqrt{2}}{2\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)} + \frac{1}{\sqrt{2}\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\int_0^x \frac{d\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^x \frac{\sqrt{2}\,d\left(\sqrt{2}t+1\right)}{\left(\sqrt{2}t+1\right)^2+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}t+1\right)\right)\Big|_0^x$$

$$= -\frac{\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}{16\sqrt{2}} - \frac{\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)-\frac{\pi}{4}}{8\sqrt{2}}$$

ដូចគ្នាដែរ

$$\frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^x \frac{t-\sqrt{2}}{\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)}dt$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\ln\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{2}t-1\right)\right)\Big|_0^x$$

$$= \frac{\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}{16\sqrt{2}} - \frac{\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right)+\frac{\pi}{4}}{8\sqrt{2}}$$

ម៉្យាងទៀត

$$\frac{1}{8}\int_0^x \frac{1}{\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)^2}dt$$

$$= \frac{1}{8}\cdot 4\int_0^x \frac{1}{\left(\left(\sqrt{2}t+1\right)^2+1\right)^2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^x \frac{d\left(\sqrt{2}t+1\right)}{\left(\left(\sqrt{2}t+1\right)^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\int_0^x \frac{d\left(\sqrt{2}t+1\right)}{\left(\left(\sqrt{2}t+1\right)^2+1\right)^2}$$

តាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

$$\int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \int \frac{du}{u^2+1} - \int u\cdot\frac{udu}{u^2+1}$$

$$= \int \frac{du}{u^2+1} - \left(u\left(-\frac{1}{2(u^2+1)}\right) - \int -\frac{1}{2(u^2+1)}du\right)$$

$$= \tan^{-1}u + \frac{u}{2(u^2+1)} - \frac{1}{2}\tan^{-1}u + C$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}u + \frac{u}{2(u^2+1)} + C\,,\quad C\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}\int_0^x \frac{1}{\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)^2}dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}t+1\right) + \frac{\sqrt{2}t+1}{2\left(\left(\sqrt{2}t+1\right)^2+1\right)}\right)\Big|_0^x$$

$$= \frac{\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)-\frac{\pi}{4}}{4\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}x+1}{4\sqrt{2}\left(\left(\sqrt{2}x+1\right)^2+1\right)} - \frac{1}{8\sqrt{2}}$$

ដូចគ្នាដែរ

$$\frac{1}{8}\int_0^x \frac{1}{\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)^2}dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}t-1\right) + \frac{\sqrt{2}t-1}{2\left(\left(\sqrt{2}t-1\right)^2+1\right)}\right)\Big|_0^x$$

$$= \frac{\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right)+\frac{\pi}{4}}{4\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}x-1}{4\sqrt{2}\left(\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+1\right)} + \frac{1}{8\sqrt{2}}$$

នោះ $f(x)$ ក្លាយទៅជា

$$f(x) = \frac{\ln\left(\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)}{16\sqrt{2}} + \frac{\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x-1\right)}{8\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}x+1}{4\sqrt{2}\left(\left(\sqrt{2}x+1\right)^2+1\right)} + \frac{\sqrt{2}x-1}{4\sqrt{2}\left(\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+1\right)}$$

យើងបាន

$$\lim_{x\to+\infty}\left(32\sqrt{2}f(x)\right)$$

$$= 32\sqrt{2}\left(-\frac{\ln 1}{16\sqrt{2}} + \frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{8\sqrt{2}} + 0 + 0\right)$$

$$= 32\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{8\sqrt{2}} = 4\pi$$

<u>ចម្លើយ</u> **គ ។**

២៩. គេតាង $n! = 1\times 2\times \ldots \times n$ និង $C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ចំពោះចំនួនគត់ $0\le k\le n$ ។ នោះតម្លៃនៃកន្សោម $S_{2016} = C(2016,2) + C(2016,5) + C(2016,8) + C(2016,11) + \cdots$ ស្មើនឹង

ក. $\frac{2^{2016}+2}{3}$ ខ. $\frac{2^{2016}-3}{3}$

គ. $\frac{2^{2016}+1}{3}$ ឃ. $\frac{2^{2016}-1}{3}$

ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុន (Newton's binomial)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^k b^{n-k}$$

យក $a = b = 1$យើងទាញបាន

$$2^n = C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + C(n,3) + \cdots$$

តាង

$$P_n = C(n,0) + C(n,3) + C(n,6) + \cdots$$

$$Q_n = C(n,1) + C(n,4) + C(n,7) + \cdots$$

$$S_n = C(n,2) + C(n,5) + C(n,8) + \cdots$$

នោះ

$$P_n + Q_n + S_n = 2^n\ ,\quad P_0 = Q_1 = S_2 = 1$$

យើងមាន

$$\begin{aligned} S_n &= C(n-1,1) + C(n-1,2) \\ &+C(n-1,4) + C(n-1,5) \\ &+C(n-1,7) + C(n-1,8) + \cdots \end{aligned}$$

យើងទាញបានទំនាក់ទំនង

$$S_n = Q_{n-1} + S_{n-1}$$
$$Q_n = P_{n-1} + Q_{n-1}$$
$$P_n = S_{n-1} + P_{n-1}$$

នាំឲ្យ

$$\begin{aligned} S_{2016} &= 2^{2015} - P_{2015} = 2^{2015} - 2^{2014} + Q_{2014} \\ &= 2^{2015} - 2^{2014} + 2^{2013} - S_{2013} \\ &= \cdots \\ &= 2^{2015} - 2^{2014} + 2^{2013} - \cdots - 2^2 + S_2 \\ &= (-2^2)\frac{(-2)^{2014}-1}{(-2)-1} + 1 = \frac{2^{2016}-1}{3} \end{aligned}$$

ចម្លើយ ឃ ។

ក្បួនកាត់៖ យើងមាន $S_{2016} = \frac{2^{2016}\pm\cdots}{3}$

យើងដឹងថា $S_2 = 1$ ហើយមានតែ $S_2 = \frac{2^2-1}{3}$ ប៉ុណ្ណោះ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់។

៣០. ចូររកក្រឡាផ្ទៃ នៃដែនប្លង់ ដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាង $x = 0,\ y = 0,\ x = 1,\ y = \frac{x^3}{x^6+1}$ ។

ក. $\frac{\pi\sqrt{3}-3\ln 3}{17}$ ខ. $\frac{\pi\sqrt{3}-3\ln 3}{18}$

គ. $\frac{\pi\sqrt{3}-3\ln 2}{17}$ ឃ. $\frac{\pi\sqrt{3}-3\ln 2}{18}$

ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\forall x\in[0,1]\ ,\quad y = \frac{x^3}{x^6+1} \ge 0$

នោះ ក្រឡាផ្ទៃនៃដែនប្លង់ខណ្ឌ កំណត់ដោយ

$$S = \int_0^1 \left|\frac{x^3}{x^6+1} - 0\right| dx = \int_0^1 \frac{x^3}{x^6+1}dx$$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2 d(x^2)}{((x^2)^3+1)}$$

យើងនឹងគណនារកអាំងតេក្រាល $\int \frac{u}{u^3+1}du$

យើងមាន

$$\int \frac{u}{u^3+1}du = \int \left(\frac{u+1}{3(u^2-u+1)} - \frac{1}{3(u+1)}\right)du$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{u+1}{u^2-u+1}du - \frac{1}{3}\int \frac{du}{u+1}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\int \frac{(2u-1)du}{u^2-u+1} + \int \frac{3\,du}{u^2-u+1}\right) - \frac{1}{3}\ln(u+1)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\int \frac{d(u^2-u+1)}{u^2-u+1} + \frac{6}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right) - \frac{1}{3}\ln(u+1)$$

$$= \frac{\ln(u^2-u+1)}{6} + \frac{\tan^{-1}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\ln(u+1)$$

យើងបាន

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{\ln 1 - \ln 1}{6} + \frac{\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}} - \frac{\ln 2 - \ln 1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{\ln 2}{3}\right) = \frac{\pi\sqrt{3} - \ln 2}{18}$$

<u>ចម្លើយ</u> ឃ ។

ជូនពរសំណាងល្អ
ដល់អនាគតវិស្វករទាំងឡាយ!

ស្វាគមន៍មកកាន់
ជីវិតមហាវិទ្យាល័យ...